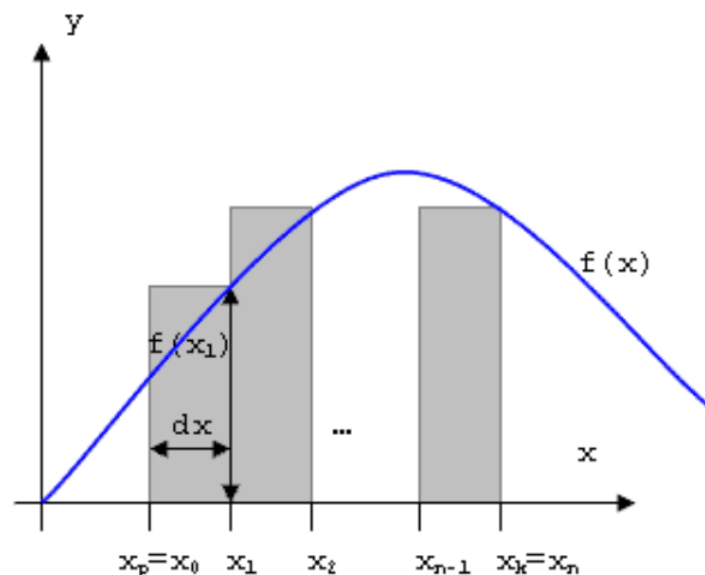


Obliczanie pola pod wykresem

Całkowanie numeryczne – metoda prostokątów

Założmy, że chcemy obliczyć całkę z funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle x_p; x_k \rangle$. Definicja całki oznaczonej Riemana, mówi nam, że wartość całki równa jest sumie pól obszarów pod wykresem krzywej w zadanym przedziale całkowania. Sumę taką możemy obliczyć w przybliżeniu dzieląc obszar całkowania na n równych części. Dla każdej takiej części możemy wyznaczyć prostokąt, który w przybliżeniu będzie odpowiadał polu obszaru pod wykresem krzywej. Jak widać na schemacie poniżej, dla funkcji rosnącej wartości tych przybliżeń będą większe niż w rzeczywistości - nadmiar powoduje część prostokąta znajdująca się ponad wykresem krzywej - dwa pierwsze prostokąty na schemacie. Natomiast dla funkcji malejącej wartości przybliżeń będą mniejsze niż rzeczywiste pole pod wykresem - niedomiar powoduje część pola znajdująca się nad wyznaczonym prostokątem - ostatni prostokąt na schemacie.



Jak już wspomnieliśmy przedział całkowania $\langle x_p; x_k \rangle$ podzielimy na n równych części. Szerokość każdej z nich wynosić będzie zatem:

$$dx = \frac{x_k - x_p}{n}$$

Taka też będzie szerokość każdego prostokąta przybliżającego nam wartość całki w danym przedziale. Wysokość każdego z prostokątów wynosić będzie:

$$f(x_i) \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n, \text{ gdzie } x_i = x_p + i \cdot dx$$

Całkę w danym przedziale uzyskamy dodając do siebie pola wszystkich tych prostokątów, wynosić będzie ona zatem:

$$dx \cdot f(x_1) + dx \cdot f(x_2) + \dots + dx \cdot f(x_n) =$$

$$dx \cdot (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

Warto zauważyć, iż im większa liczba przedziałów n z tym większą dokładnością wyznaczymy interesującą nas całkę.

► PRZYKŁAD:

Obliczymy przybliżoną wartość całki dla funkcji $f(x) = x^2 + 3$ w przedziale $\langle 2, 5 \rangle$ z dokładnością $n = 3$.

Obliczmy najpierw szerokość przedziału $dx = (x_k - x_p) / n = (5 - 2) / 3 = 3 / 3 = 1$.

Teraz obliczymy wartość całki.

$$\begin{aligned} dx \cdot (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) &= 1 \cdot (f(2 + 1 \cdot 1) + f(2 + 2 \cdot 1) + f(2 + 3 \cdot 1)) = 1 \cdot (f(3) + f(4) + f(5)) \\ &= 1 \cdot (12 + 19 + 28) = 59. \end{aligned}$$

Zatem przybliżona wartość całki wynosi 59.